MATHEMATIQUES

Régime économique et régime technologique

COEFFICIENT : 6 (régime économique)
3 (régime technologique)

Les trois exercices sont indépendants

I. Voici les notes obtenues par les candidats à l'EME en 1990 à l'épreuve écrite d'anglais première langue; les notes ont des valeurs entières comprises entre 0 et 100.

Classes	[0;4]	[5;9]	[10; 14]	[15;19]	[20;24]	[25;29]	[30;34]	[35;39]	[40;44]
Effectifs	4	8	33	83	120	147	209	207	270

Classes	[45;49]	[50; 54]	[55;59]	[60;64]	[65;69]	[70;74]	[75;79]	[80;84]	[85;100]
Effectifs	239	213	159	75	51	30	11	4	1

1) Calculer à 10^{-4} près les fréquences cumulées jusqu'aux valeurs (comprises) :

14 ; 29 ; 44 ; 59 ; 74

2) Placer les points ainsi obtenus sur la feuille de papier Gausso-arithmétique.

3) Justifier l'approximation de cette statistique par une variable aléatoire normale.

4) Obtenir graphiquement une estimation à l'unité près de la moyenne et de l'écart-type de cette variable aléatoire normale; justifier brièvement.

Tournez la page S.V.P.

II. Soit $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

2) Déterminer les valeurs propres de A^{-1} et les vecteurs propres associés. En déduire que A^{-1} n'est pas diagonalisable.

3) Trouver $B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $A^{-1} = -2I + B$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on note $A^{-n} = (A^{-1})^n$; calculer A^{-n} (écrire tous les coefficients de cette matrice en fonction de n).

5) Soit $(a;b;c) \in \mathbf{R}^3$ et f l'application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ qui à x associe $(ax^2+bx+c)\exp(-\frac{1}{2}x)$.

Montrer qu'il existe $(a';b';c') \in \mathbf{R}^3$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \qquad f'(x) = (a'x^2 + b'x + c')\exp(-\frac{1}{2}x)\,.$$

Exprimer a', b', c' en fonction de a, b et c.

6) Écrire matriciellement ces relations donnant a', b' et c' en fonction de a, b et c puis, à l'aide de la première question, exprimer a, b et c en fonction de a', b' et c'.

7) Trouver toutes les fonctions de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ dont la dérivée cinquième est l'application qui à tout réel x associe $(-2x^2+3x+1)\exp(-\frac{1}{2}x)$, en utilisant les questions précédentes.

III. Une cible de jeu de fléchettes est constituée d'un disque en bois de rayon 16cm; elle est peinte en blanc, sauf la zone centrale peinte en rouge, qui est un disque de rayon R et de même centre que la cible. On appelle X la variable aléatoire dont la valeur est la distance entre le centre de la cible et le point d'impact de la fléchette, cette distance étant mesurée en cm. A la suite d'une étude statistique, on considère que pour un joueur donné, la loi de probabilité de X est la loi exponentielle de paramètre a dont la densité est la fonction f_a définie par :

$$f_a(x) = a\exp(-ax) \text{ si } x \in \mathbf{R}^+ \quad \text{et} \quad f_a(x) = 0 \text{ sinon}\,.$$

1) Soit F_a la fonction de répartition de X. Pour tout réel x, exprimer $F_a(x)$ en fonction de a et de x.

2) On observe que, pour un joueur occasionnel, une fléchette sur 15 n'atteint pas la cible; comment peut-on évaluer a à l'aide de cette observation? Donner une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

A SUIVRE

3) Désormais, on prend $a = 0,17$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$; quelle valeur doit-on donner à R pour que la probabilité qu'une fléchette atteigne la zone blanche soit n fois la probabilité que celle-ci atteigne la zone rouge ?

4) Soit g la fonction numérique de variable réelle qui à x associe $\frac{100}{17} \ln \frac{x+1}{x+\exp(-2,72)}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Établir le tableau des variations de g.

b) Montrer que $\mathcal{C}$ a un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées. (Valeurs exactes puis valeurs approchées à 10^{-3} près).

c) Dessiner $\mathcal{C}$.

d) Donner une primitive de g sur $\mathbf{R}^+$.

e) Après avoir comparé $\ln(x+1)$ et $\ln(x+\exp(-2,72))$ pour $x \in \mathbf{R}^+$, minorer $\int_0^x g(t)dt$ pour $x \in \mathbf{R}^+$ et en déduire la limite en $+\infty$ de la fonction qui à x associe $\int_0^x g(t)dt$.

5) Vérifier que, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $g(n)$ est la valeur de R demandée à la troisième question ; calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de $g(4)$.

Désormais, on prend $R = 1,2$ cm ; calculer des valeurs approchées à 10^{-4} près des probabilités :
- d'atteindre avec une fléchette la zone rouge
- d'atteindre avec une fléchette la zone blanche
- d'atteindre avec une fléchette la zone rouge sachant que la cible a été atteinte.

6) On considère que les lancers de fléchettes sont indépendants. Un joueur lance 5 fléchettes ; soit N le nombre d'entre elles atteignant la zone rouge ; quelle est la loi de probabilité de N ? Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près des nombres $P(N = k)$; (k étant un entier, $P(N = k)$ est la probabilité que N prenne la valeur k).

7) Pour $10F$, coût d'une partie, le joueur a le droit de lancer 5 fléchettes ; si au moins 3 d'entre elles atteignent la zone rouge : il reçoit un lot dont la valeur est $80F$ sinon il reçoit un lot de consolation dont la valeur est $4F$; au cours d'une journée, l'organisateur du jeu vend 60 parties ; on admet que les parties sont des épreuves indépendantes.

a) Quelle est la probabilité que l'organisateur perde de l'argent ce jour-là ? Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins $200F$?

b) Écrire en langage PASCAL un programme qui affiche à l'écran la probabilité que l'organisateur gagne au moins x francs ce jour-là, x étant fourni au clavier par l'utilisateur du progamme.

- :- :- :- :- :- :-

FIN